

Title	量子エンタングルメントの数理(量子解析におけるミクロ・マクロ双対性)
Author(s)	大矢, 雅則; 松岡, 隆志
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1565: 1-12
Issue Date	2007-07
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/81174">http://hdl.handle.net/2433/81174</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 量子エンタングルメントの数理

東京理科大学・理工 大矢雅則 (Masanori Ohya)

Department of Information Science

Tokyo University of Science

諏訪東京理科大学・経営情報 松岡隆志 (Takashi Matsuoka)

Department of Business Administration and Information

Tokyo University of Science, Suwa

### 1. 始めに

二つ以上の系の間に存在する、量子系特有の強い干渉性を有する状態は、量子エンタングルド状態と呼ばれる。EPR (Einstein・Podolsky・Rosen) 論文に端を発する量子エンタングルメントの研究は、Bell の不等式の導出とその実験的検証によって、エンタングルド状態の存在が広く認められることとなり、量子コンピュータや量子テレポテーションなどの量子情報分野の中核的な役割を担うものとして、近年頃にその重要性が指摘されるようになっていく。

量子エンタングルド状態の数学的な定義は、合成系の可分割 (分離可能) な状態を定義することで、可分割ではない状態として与えられる [1]。いま、二つの部分系からなる量子合成系を考え、その合成状態が可分割であるとは、Hilbert 空間  $h$ 、 $k$  上の密度作用素  $\rho_k, \sigma_k$  ( $k=1,2,\dots$ ) が存在して、

$$\sum p_k \rho_k \otimes \sigma_k, \quad p_k \geq 0, \quad \sum p_k = 1 \quad (1.1)$$

と分解できることをいう。この可分割な状態は古典的な干渉性を有する状態に対応し、よって可分割ではない状態 (エンタングルド状態) が量子系特有の強い干渉性を示す状態に対応する。このとき、任意に与えられた状態が可分割であるか否かを判定することはかなり難しく、合成系が低次元の Hilbert 空間のテンソル積で与えられるときに限り、その必要十分条件が Horodecki 達によって与えられている [2]。

ところで、量子エンタングルメントに関する結果は有限次元に関するものが多く、無限次元の系において、エンタングルド状態の性質を厳密に解明し、特徴付けることはまだあまりできていない。Belavkin と Ohya は従来のエンタングルド状態の定義 (i.e., (1.1) 式による定義) とは別に、無限次元 Hilbert 空間上の量子合成系において、エンタングルド状態の特徴を解明すべく、Hilbert-Schmidt 作用素の手法を用いたアプローチの方向を示した [3,4]。

いま、 $\omega$  が  $B(h \otimes k)$  ( $h \otimes k$  上の有界線形作用素の全体) 上の正規状態であれば、ある密度作用素  $\theta$  が存在して、

$$\omega(A \otimes B) = \text{tr}_{\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{k}}(A \otimes B)\theta, \quad A \in B(\mathfrak{h}), B \in B(\mathfrak{k}) \quad (1.2)$$

と書ける。このとき、合成状態 $\omega$ は、

$$\omega(A \otimes B) = \text{tr}_{\mathfrak{h}} A \phi(B) = \text{tr}_{\mathfrak{k}} \phi^*(A) B \quad (1.3)$$

と書くことが出来て、 $\phi$ 、 $\phi^*$ は

$$\phi(B) = \text{tr}_{\mathfrak{k}} \theta(I \otimes B), \quad \phi^*(A) = \text{tr}_{\mathfrak{h}} \theta(A \otimes I) \quad (1.4)$$

と与えられる。ここで、 $\phi$ は、 $B(\mathfrak{k})$ から $B(\mathfrak{h})_*$  ( $= \{A \in B(\mathfrak{h}); \text{tr} \sqrt{A^* A} < \infty\}$ )への線形写像とみなすことができ、 $\phi$ の共役写像 $\phi^*$ は $B(\mathfrak{h})$ から $B(\mathfrak{k})_*$ への線形写像となる。 $\phi$ 、 $\phi^*$ をエンタングルメント写像、あるいは単にエンタングルメントと呼ぶ。Belavkin と Ohya は、 $\phi$ 、 $\phi^*$ が Hilbert-Schmidt 作用素で構成されることを明らかにし、一般に、 $\phi$ 、 $\phi^*$ は常に正写像ではあるが、完全正写像になるとは限らず、次が成立することを示した。

**補題 1.1** 正規状態 $\omega$ が可分割。⇒ エンタングルメント $\phi$ 、 $\phi^*$ は完全正写像。

本稿では、彼らの手法を振り返り、 $\phi$ 、 $\phi^*$ による状態の分類と Horodecki 達によって与えられた低次元における可分割な状態の特徴付けとの関連を述べる[5]。また、合成状態のエンタングルメントの度合いを測る指標 [3,4,6] を、量子マルコフのあるクラス[7]に適用した結果 [8,9] を紹介する。

## 2. エンタングリング作用素と合成状態の分類

最初に、純粋状態にある合成系が Hilbert-Schmidt 作用素を用いて、どのように表現されるかを説明する。そのために、我々は、部分系の状態から議論を始める。

$\mathfrak{k}$ を可分な Hilbert 空間、 $\varphi$ を $B(\mathfrak{k})$ 上の正規状態とすると、ある可分な Hilbert 空間 $\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{k}$ への Hilbert-Schmidt 作用素 $H$  (i.e.,  $\mathfrak{h}$ の任意の完全正規直交系 (以下、CONS と略)  $\{|x_k\rangle\} \subset \mathfrak{h}$  に対して、 $\|H|x_k\rangle\|^2 < \infty$ 。)が存在して、 $\varphi$ は次式のように表現され得る。

$$\varphi(B) = \text{tr}_{\mathfrak{h}} H^* B H = \text{tr}_{\mathfrak{k}} B \sigma, \quad B \in B(\mathfrak{k}) \quad (2.1)$$

ここで、 $\sigma$ は正規状態 $\varphi$ に対応する密度作用素であり、 $\sigma = H H^*$ と与えられる。この作用素 $H$ を、我々は振幅作用素と呼び、 $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ とすれば $H = \sqrt{\sigma}$ とすることが出来て、作用素 $H$ の存在は常に保証される。また、 $\dim \mathfrak{h} = 1$ の時は、 $\varphi$ が純粋状態であることを意味し、すなわち、ベクトル $H = |\zeta\rangle \in \mathfrak{h}$  ( $\|\zeta\|^2 = 1$ )を用いて、 $\varphi(B) = \langle \zeta | B | \zeta \rangle$ と書けることになる。

さて、この補助空間 $\mathfrak{h}$ を、 $\mathfrak{h} = \{E_\sigma \mathfrak{k}\}^{\mathfrak{H}}$  ( $E_\sigma$ は $\sigma$ の台への射影)と取れば、ユニタリー同値の意味で、振幅作用素 $H$ は一意となる。このとき、密度作用素 $\sigma$ の Schatten 分解を $\sigma = \sum_n |h_n\rangle \langle h_n|$  (i.e.,  $|h_n\rangle \in \mathfrak{k}$ 、 $\langle h_n | h_m \rangle = \mu_n \delta_{n,m}$ 、 $\mu_n$ は $\sigma$ の固有値。)と与えれば、 $H$ は、

$$H = \sum |h_n\rangle \langle e_n| \quad (2.2)$$

と書ける。ここで、 $\{|e_n\rangle\}$  は  $\mathfrak{h}$  のある CONS である。例えば、 $\mathfrak{h} \subseteq l^2$  として、 $\{|e_n\rangle\}$  を標準基底  $\{|n\rangle\}$  として選べば、古典・量子コーディングなどの文脈にも対応する。

補助空間  $\mathfrak{h}$  上の作用素  $A \in B(\mathfrak{h})$  に対して、行列の転置および複素共役になぞらえた無限次元版のオペレーションを定義するために、(2.2) 式の  $\{|e_n\rangle\}$  (i.e.,  $H^*H$  の固有ベクトルの集合) 上で定義される反ユニタリー作用素  $J$  を導入しよう。すなわち、 $J$  は、任意の  $x, y \in \mathfrak{h}$  に対して  $\langle Jx | Jy \rangle = \langle y | x \rangle$  を満たし、 $J: |x\rangle = \sum c_n |e_n\rangle \mapsto J|x\rangle = \sum \bar{c}_n |e_n\rangle$  ( $c_n \in \mathbb{C}$ ) なる性質を持つ作用素である。この  $J$  を用いると、 $A \in B(\mathfrak{h})$  の  $\mathfrak{h}$ -転置  $\tilde{A} \equiv JA^*J$  と  $\mathfrak{h}$ -複素共役  $\bar{A} \equiv JAJ$  が定義できて、 $\langle x | Jy \rangle = \langle y | Jx \rangle$  が成立するから、簡単な計算で

$$\langle e_m | \tilde{A} | e_n \rangle = \langle e_n | A | e_m \rangle, \quad \langle e_m | \bar{A} | e_n \rangle = \overline{\langle e_m | A | e_n \rangle}$$

となることが分かる。

以上の準備の下で、振幅作用素  $H$  が合成系の純粋状態を与えることを見ていこう。

いま、 $\mathfrak{h}$  から  $\mathfrak{k}$  への振幅作用素  $H$  が与えられると、 $B(\mathfrak{k})$  上の状態  $\varphi$  に加えて、 $B(\mathfrak{h})$  上の正規状態  $\psi$  を次のように定義できる。

$$\psi(A) = \text{tr}_{\mathfrak{k}} H \tilde{A} H^* = \text{tr}_{\mathfrak{h}} A \rho, \quad A \in B(\mathfrak{h}) \quad (2.3)$$

ここで、 $\psi$  に対応する密度作用素  $\rho$  は、 $\rho \equiv \widetilde{H^*H}$  と与えられているが、 $\mathfrak{h}$ -転置および  $\mathfrak{h}$ -複素共役が  $H^*H$  の固有ベクトル上で定義されているので、 $\rho = \tilde{\rho} = \bar{\rho}$  となることに注意しておく。この意味で、 $\rho$  は実作用素とみなすことができる。このとき、 $\varphi$  と  $\psi$  は、次式で定義される  $B(\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{k})$  上の合成状態  $\omega$  の部分系の状態となる。

$$\omega(A \otimes B) = \text{tr}_{\mathfrak{h}} \tilde{A} H^* B H = \text{tr}_{\mathfrak{k}} B H \tilde{A} H^* \quad (2.4)$$

実際、 $\omega(I \otimes I) = 1$  かつ  $\omega(C^*C) \geq 0$  ( $C = \sum \alpha_k A_k \otimes B_k$ ) が成立するから、 $\omega$  は  $B(\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{k})$  上の状態であり、また、定義より  $\omega(A \otimes I) = \psi(A)$ 、 $\omega(I \otimes B) = \varphi(B)$  も成立する。実は、この  $\omega$  は、次式で定義されるベクトル  $|\Omega\rangle \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{k}$  によって一意に表現される純粋状態とみなされる。

$$\langle \zeta \otimes \eta | \Omega \rangle = \langle \eta | H J \zeta \rangle \quad (\forall |\zeta\rangle \in \mathfrak{h}, |\eta\rangle \in \mathfrak{k}) \quad (2.5)$$

ベクトル  $|\Omega\rangle$  は、例えば  $H$  の分解(2.2)を用いると、

$$\langle \eta | H J \zeta \rangle = \sum \langle \eta | h_n \rangle \langle e_n | J \zeta \rangle = \sum \langle \zeta | J e_n \rangle \langle \eta | h_n \rangle = \sum \langle \zeta \otimes \eta | e_n \otimes h_n \rangle$$

となるから、 $|\Omega\rangle = \sum |h_n \otimes e_n\rangle$  と書いて、確かに

$$\begin{aligned} \omega(A \otimes B) &= \text{tr}_{\mathfrak{h}} \tilde{A} H^* B H = \sum_{m,n,k} \langle e_m | \tilde{A} | e_n \rangle \langle h_n | B | h_k \rangle \langle e_k | e_m \rangle \\ &= \sum_{m,n,k} \langle e_n | A | e_m \rangle \langle h_n | B | h_m \rangle = \langle \Omega | A \otimes B | \Omega \rangle \end{aligned}$$

が成立する。ベクトル  $|\Omega\rangle$  を、“密度作用素  $\sigma$  の純粋化” と呼ぶ。

上記の純粋合成状態に対する議論を、混合合成状態に拡張しよう。 $\omega$  を  $B(h \otimes k)$  上の正規状態とすれば、 $\omega$  はある可分な Hilbert 空間  $f$  から  $h \otimes k$  への振幅作用素  $V$  を用いて、

$$\omega(A \otimes B) = \text{tr}_f V(A \otimes B)V^* = \text{tr}_{h \otimes k} (A \otimes B)\theta \quad (2.6)$$

と書ける。ここで、 $\theta$  は  $\omega$  に対応する密度作用素である。いま、 $f$  を  $f \equiv \overline{\{E_\theta(h \otimes k)\}}^H$  と取り、 $f$  のある固定した  $\text{CONS} \{|f_n\rangle\} \subset f$  上に反・ユニタリー作用素  $J_f$  を導入しておく。また、 $h$  上の状態  $\rho = \text{tr}_k \theta$  の規格化された固有ベクトルを含む  $h$  の  $\text{CONS} \{|e_n\rangle\} \subset h$  上にも、同様に、反・ユニタリー作用素  $J_h$  が定義されているものとする。このとき、我々は“密度作用  $\theta$  の純粋化”を介して、 $h$  から  $f \otimes k$  への振幅作用素  $H$  を次のように定義出来る。

$$\langle \xi \otimes \eta | H J \zeta \rangle = \langle \zeta \otimes \eta | \tilde{H} J \xi \rangle \quad (\forall |\zeta\rangle \in h, |\eta\rangle \in k, |\xi\rangle \in f) \quad (2.7)$$

ここで、 $\tilde{H}$  は  $\tilde{H}U = V$  と与えられていて、 $U$  は  $V^*V$  の規格化された固有ベクトル  $\{|v_k\rangle\}$  に対して、 $U = \sum |f_k\rangle \langle v_k|$  とするユニタリー変換である。いま、 $k$  上の恒等作用素を  $I_k$  とすれば、 $\text{CONS} \{|e_n\rangle\}$ 、 $\{|v_k\rangle\}$  による  $V$  の行列要素的表現は、

$$V = \left( \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| \otimes I_k \right) \tilde{H} U = \sum_{n,k} |e_n \otimes h_k(n)\rangle \langle v_k|$$

となる。 $|h_k(n)\rangle \in k$  は  $I_k$  をある  $\text{CONS} \{|d_m\rangle\} \subset k$  を用いて  $I_k = \sum |d_m\rangle \langle d_m|$  と表せば、

$$|h_k(n)\rangle = (\langle e_n| \otimes I_k) \tilde{H} |f_k\rangle = \sum_m |d_m\rangle \langle e_n \otimes d_m | \tilde{H} |f_k\rangle$$

と展開される。すなわち、 $\tilde{H}$  は

$$\tilde{H} = VU^* = \sum_{n,k} |e_n \otimes h_k(n)\rangle \langle f_k| \quad (2.8)$$

と表すことができる。よって、振幅作用素  $H$  の定義 (2.7) から、 $H$  は、 $\{|e_n\rangle\}$ 、 $\{|f_n\rangle\}$  に関する  $\tilde{H}$  の転置として、次のように書ける。

$$H = \sum_{n,k} |f_k \otimes h_k(n)\rangle \langle e_n| \quad (2.9)$$

$$= \sum_n |H_n\rangle \langle e_n|. \quad (2.10)$$

ここで、 $|H_n\rangle = \sum_k |f_k \otimes h_k(n)\rangle$  とおいた。 $H$  の分解 (2.9) を用いれば、次の定理は簡単に示せる [3]。

**定理 2.1** (2.6) 式の正規合成状態  $\omega$  は、振幅作用素  $H$  を用いて次のように書ける。

$$\omega(A \otimes B) = \text{tr}_h \tilde{A} H^* (I \otimes B) H = \text{tr}_{f \otimes k} H \tilde{A} H^* (I \otimes B) \quad (2.11)$$

また、部分系の密度作用素  $\rho, \sigma$  は、それぞれ、次式で与えられる。

$$\rho = \widetilde{H^* H} = H^* H, \quad \sigma = \text{tr}_f H H^* \quad (2.12)$$

振幅作用素  $H$  をエンタングリング作用素と呼ぶ。純粋合成状態のエンタングリング作用素

による表現 (2.4) 式は、定理 2.1 において、 $\mathbf{f} = \mathbf{C}$  としたケースに対応する。

エンタングリング作用素  $H$  を用いて、前節で触れた写像  $\phi$ 、 $\phi^*$  を定義しよう。

$$\phi(B) \equiv \overline{H^*(I \otimes B)H} = JH^*(I \otimes B)^* HJ \quad (\forall B \in B(\mathbf{k})) \quad (2.13)$$

とおくと、 $\phi$  は  $B(\mathbf{k})$  から  $B(\mathbf{h})_*$  への写像となり、その共役写像  $\phi^*: B(\mathbf{h}) \mapsto B(\mathbf{k})_*$  は、

$$\phi^*(A) = \text{tr}_r H \tilde{A} H^* \quad (\forall A \in B(\mathbf{h})) \quad (2.14)$$

と与えられる。このとき、合成状態  $\omega$  は、写像  $\phi$ 、 $\phi^*$  を用いて次のように書ける。

$$\omega = \text{tr}_h A \phi(B) = \text{tr}_k \phi^*(A) B$$

さて、写像  $(\sim \circ \phi): B \in B(\mathbf{k}) \mapsto \phi(B)$ 、および  $(\phi^* \circ \sim): A \in B(\mathbf{h}) \mapsto \phi^*(\tilde{A})$  を考えると、これらの写像は、それぞれ Steinspring 形式、Krus-Sudarshan 形式で書けて、完全正写像であることが分かる。すなわち、

$$\phi(\widetilde{B}) = H^*(I \otimes B)H, \quad \phi^*(\tilde{A}) = \text{tr}_r H A H^* = \sum (\langle f_k | \otimes I) H A H^* (|f_k\rangle \otimes I).$$

ところで、写像  $\Lambda: B(\mathbf{h}) \mapsto B(\mathbf{k})$  が完全共正 (complete co-positive) であるとは、任意の  $n \in \mathbf{N}$  において、 $n \times n$  の正定値作用素行列  $[A_{ij}]$  ( $A_{ij} \in B(\mathbf{h})$ ) に対し、常に  $[\Lambda(A_{ij})] > 0$  が成立することをいうが、写像  $(\sim \circ \phi)$  と  $(\phi^* \circ \sim)$  の完全正性は、 $\phi$ 、 $\phi^*$  が完全共正であることを意味する。一般に、 $\phi$ 、 $\phi^*$  は正写像ではあるが、完全正になるとは限らない。例えば、純粋状態が非可分割 (エンタングルド状態) であれば、その  $\phi^*$  は完全正にはならない。

以上の議論から我々は、 $\phi$ 、 $\phi^*$  の完全正性が状態の可分割性に関連することを期待できるが、まずは、 $\phi$ 、 $\phi^*$  を用いて一般化された合成 (エンタングルド) 状態を次のように定義しよう。

**定義 2.1**  $\text{tr}_h \phi(I) = 1$  と規格化された  $B(\mathbf{k})$  から  $B(\mathbf{h})_*$  への完全共正写像  $\phi$  の共役写像  $\phi^*: B(\mathbf{h}) \mapsto B(\mathbf{k})_*$  を、状態  $\rho \equiv \phi(I)$  と状態  $\sigma \equiv \phi^*(I)$  の (一般化された) エンタングルメントという。また、エンタングルメントの全体を  $\mathbf{e}$  と表す。

エンタングリング作用素  $H$  の (2.10) 式による分解を用いると、 $\phi^*$ 、 $\phi$  および、その対応する密度作用素  $\theta$  は、次のように分解される。

$$\phi^*(A) = \sum \langle e_n | A | e_m \rangle \text{tr}_r |H_m\rangle \langle H_n| \quad (2.15)$$

$$\phi(B) = \sum |e_m\rangle \langle e_n| \langle H_n | I \otimes B | H_m \rangle \quad (2.16)$$

$$\theta_\rho = \sum |e_n\rangle \langle e_m| \otimes \text{tr}_r |H_n\rangle \langle H_m| \quad (2.17)$$

ここで、 $\{|e_n\rangle\}$  が  $\rho$  の固有値  $\{\lambda_n\}$  の固有ベクトルであることは、次の直交条件に対応する。

$$\text{tr}_{r \otimes k} |H_n\rangle \langle H_m| = \lambda_n \delta_{m,n} = \langle H_m | H_n \rangle \quad (2.18)$$

さて、 $\omega$  が可分割のとき、そのエンタングルメントはどのように表されるだろうか。いま、

$\omega$  が可分割な状態ならば、部分系の密度作用素  $\rho_k, \sigma_k (k=1, 2, \dots)$  が存在し、

$$\omega(A \otimes B) = \sum p_n \text{tr}_h A \rho_n \cdot \text{tr}_k B \sigma_n, \quad p_n \geq 0, \quad \sum p_n = 1$$

と分解できる。可分割な  $\omega$  のエンタングルメント  $\phi^*, \phi$  は、(1.4)式に準じれば、

$$\phi^*(A) = \sum p_n \text{tr}_h A \widetilde{\rho_n} \cdot \sigma_n, \quad \phi(B) = \sum p_n \text{tr}_k B \sigma_n \cdot \widetilde{\rho_n}$$

と書ける。ここで、 $A \mapsto \text{tr}_h A \widetilde{\rho_n} \cdot \sigma_n$  を素エンタングルメントと呼ぶ。すなわち、可分割な  $\omega$  のエンタングルメントは素エンタングルメントの線形結合で表すことができる。このとき、全ての  $A_j \in B(h)$  に対して、

$$\text{tr}_h A_i^* A_j \widetilde{\rho_n} = \text{tr}_h \widetilde{A_i^* A_j} \rho_n = \text{tr}_h J A_j^* A_i J \rho_n = \text{tr}_h A_j^* A_i \widetilde{\rho_n}$$

が成立する。 $\phi^*$  の完全共正を考慮すれば、上の等式は、 $\phi^*$  が完全正でもあることを意味している。よって、前節で述べた補題 1.1 が成立する[3]。

**補題 1.1** 正規状態  $\omega$  が可分割。  $\Rightarrow$  エンタングルメント  $\phi, \phi^*$  は完全正写像。

補題 1.1 の逆は、一般には成立しない。すなわち、 $\phi^*$  が完全正であっても、非可分割な状態（エンタングルド状態）が存在する。我々は、4 節で、 $\phi^*$  が完全正であって非可分割な状態の具体例を取り上げる[8,9]。

これまでの議論を踏まえ、まず、 $\Theta$  の部分集合として二つのクラスを定義しよう。

## 定義 2.2

- (1)  $\phi^*$  が完全正写像ではないとき、 $\phi^*$  を  $\phi_q^*$  と書いて q-エンタングルメントと呼ぶ。また、 $\phi_q^*$  の全体を  $\Theta_q$  と表す。
- (2)  $\phi^*$  が素エンタングルメントの線形結合で与えられるとき、 $\phi^*$  を  $\phi_c^*$  と書いて c-エンタングルメントと呼ぶ。また、 $\phi_c^*$  の全体を  $\Theta_c$  と表す。

ところで、量子確率論や量子情報理論においては、二つ以上の系の間の相関を表すマルコフ連鎖や合成状態は、可分割な状態が用いられるケースも多い。よって、c-エンタングルメントを、さらに細かく分類しておくことは意味のあることである。このとき、エンタングルメント  $\phi^*$  の分解 (2.14) 式を用いると、c-エンタングルメントに二つのクラスを導入できる。

## 定義 2.2

- (3) エンタングルメント  $\phi^*$  が、(2.15)式において、強い直交条件  $\text{tr}_r |H_n\rangle \langle H_m| = \lambda_n \sigma_n \delta_{m,n}$  を満たすとき、

$$\phi^*(A) = \sum \lambda_n \langle e_n | A | e_n \rangle \sigma_n \quad (2.18)$$

となる。ここで、 $\sigma_n$  は  $B(k)$  上の密度作用素である。このとき、 $\phi^*$  を  $\phi_d^*$  と書いて d-エンタングルメントと呼ぶ。また、 $\phi_d^*$  の全体を  $\Theta_d$  と表す。

- (4) エンタングルメント  $\phi^*$  が、d-エンタングルメントで、かつ、(2.18)式における全ての  $\sigma_n$  が直交するとき、 $\phi^*$  を  $\phi_o^*$  と書いて o-エンタングルメントと呼ぶ。また、 $\phi_o^*$  の全体を  $\Theta$  と表す。

### 3. q-エンタングルメントと PPT 条件

この節では、Peres[10]、Horodecki 達[2]による合成状態の分類とエンタングルメント  $\phi^*$  によるクラスの関連について、著者達によって最近得られた結果[5]も踏まえて議論する。

前節において、エンタングルメント  $\phi^*$  の完全正性は、状態の可分割性の必要条件にしかかなりえないことに触れた。合成状態の可分割性の必要条件はいくつか知られているが、Peres は有限次元の合成系  $h \otimes k$  上の密度作用素  $\theta$  の可分割性の必要条件を、次のように与えた[10]。

**定理 3.1**  $\theta$  が可分割。  $\Rightarrow \theta^{T_k} > 0$

ここで、 $\theta^{T_k}$  は、 $\theta$  の部分系  $k$  における部分転置行列と呼ばれ、 $h, k$  のある固定された基底  $\{x_i\}, \{y_m\}$  を用いて、 $\theta^{T_k}$  の要素が、次で与えられる行列である。

$$\langle x_i \otimes y_m | \theta^{T_k} | x_j \otimes y_n \rangle = \langle x_i \otimes y_n | \theta | x_j \otimes y_m \rangle \quad (3.1)$$

定理 3.1 の条件は PPT (Positive Partial Transpose) 条件と呼ばれる。 $\theta$  が可分割であれば、 $\theta = \sum p_k \rho_k \otimes \sigma_k$  と書けるが、行列の転置を取る操作  $T$  は行列の正値性を保存するから、 $\theta^{T_k} = \sum p_k \rho_k \otimes \sigma_k^T > 0$  となり、定理 3.1 が成立する。PPT 条件を満たす状態を PPT 状態、満たさない状態を NPT 状態と呼ぶ。Horodecki 達は、Jamiołkowski 同型写像[11]と低次元における正写像の分解[12, 13, 14]を用いて、低次元の合成系においては、PPT 条件が可分割性の十分条件にもなり得ることを示した。以下に彼らの議論の概要を述べよう。

彼らは、まず、合成系上の状態の可分割性の必要十分条件を Hahn-Banach の定理を適用することで、次のように導いた[2]。

**定理 3.2**  $h, k$  上の全ての純粋状態  $\rho, \sigma$  に対し、 $\text{tr} W(\rho \otimes \sigma) > 0$  を満たすエルミート作用素  $W$  の全体を  $W$  とすると、次が成立する。

$$h \otimes k \text{ 上の密度作用素 } \theta \text{ が可分割。} \Leftrightarrow \text{tr} W \theta > 0 \quad \forall W \in W$$

上記の定理は、合成系が有限次元の場合、エルミート作用素と正写像の対応関係を与える Jamiołkowski 同型写像を用いて、正写像を用いた文脈に書き直すことができる。

**定理 3.3**  $B(k)$  から  $B(h)$  の正写像  $\Lambda$  の全体を  $P$  とすると、次が成立する。

$$h \otimes k \text{ 上の密度作用素 } \theta \text{ が可分割。} \Leftrightarrow (I \otimes \Lambda) \theta > 0 \quad \forall \Lambda \in P$$

定理 3.2、定理 3.3 は、可分割な状態を特徴付けてはいるが、このままでは任意に与えら



れた状態が可分割であるかどうかを操作的にチェックすることは難しい。そこで、Horodecki 達は低次元の場合に限られるが、定理 3.3 に正写像の特徴付けに関する結果を適用した。

いま、 $M_n$  を  $n \times n$  の複素行列の全体とし、 $M_2$  から  $M_2$ 、 $M_3$  から  $M_2$  への正写像  $\Lambda$  の全体をそれぞれ  $P_{2 \rightarrow 2}$ 、 $P_{3 \rightarrow 2}$  とすると、 $P_{2 \rightarrow 2}$ 、 $P_{3 \rightarrow 2}$  に含まれる任意の正写像  $\Lambda$  は二つの完全正写像  $\Lambda_1^{\text{CP}}$ 、 $\Lambda_2^{\text{CP}}$  を用いて、次のように分解できる[12, 13, 14]。

$$\Lambda = \Lambda_1^{\text{CP}} + \Lambda_2^{\text{CP}} \circ T \quad (3.2)$$

よって、低次元の合成系においては、

$$(I \otimes \Lambda)\theta = (I \otimes \Lambda_1^{\text{CP}})\theta + (I \otimes \Lambda_2^{\text{CP}})\theta^{T_k} \quad (3.3)$$

となるから、定理 3.3 は PPT 条件を用いて次のように書き直される。

**系 3.4**  $h \otimes k = C^2 \otimes C^2$  または  $C^2 \otimes C^3$  のとき、

$$\theta \text{ が可分割。} \Leftrightarrow (I \otimes \Lambda)\theta > 0 \quad \forall \Lambda \in P_{2 \rightarrow 2}, \Lambda \in P_{3 \rightarrow 2} \quad \Leftrightarrow \theta^{T_k} > 0$$

このとき、系 3.4 は  $q$ -エンタングルメント  $\phi_q^*$  を用いて書き直すことができる。

いま、 $L[M_n, M_n]$  を  $M_n$  から  $M_n$  への線形写像の全体とし、次のような同型写像  $w : L[M_n, M_n] \mapsto M_n \otimes M_n$  を考える。各  $\Lambda \in L[M_n, M_n]$  に対して、

$$w_{P_+}(\Lambda) = \sum_{k,l}^n |e_k\rangle\langle e_l| \otimes \Lambda(|e_k\rangle\langle e_l|) = (I \otimes \Lambda)P_+ \quad (3.4)$$

$$w_J(\Lambda) = \sum_{k,l}^n |e_k\rangle\langle e_l|^* \otimes \Lambda(|e_k\rangle\langle e_l|) = (I \otimes \Lambda)J \quad (3.5)$$

ここで、 $\{|e_k\rangle\langle e_l|\}$  は  $M_n$  の基底であり、 $P_+ = \sum_{k,l}^n |e_n\rangle\langle e_n| \otimes |e_n\rangle\langle e_n|$ 、 $J = \sum_{k,l}^n |e_k\rangle\langle e_l|^* \otimes |e_k\rangle\langle e_l|$  であるが、特に、(3.5)式  $w_J(\Lambda)$  を Jamiołkowski 同型写像と呼ぶ[11]。このとき、次の補題が成立する[13, 15, 16]。

**補題 3.5**  $\Lambda \in L[M_n, M_n]$  において、次が成立する。

$$(1) \Lambda \text{ が完全正写像。} \Leftrightarrow w_{P_+}(\Lambda) > 0 \quad (2) \Lambda \text{ が完全共正写像。} \Leftrightarrow w_J(\Lambda) > 0$$

さて、 $\omega$  を  $M_n \otimes M_n$  上の合成状態、その密度作用素を  $\theta$  とし、 $\omega$  のエンタングルメント  $\phi^*$  の(2.15)式による分解を (3.4)、(3.5) 式に適用すると、

$$w_J(\phi^*) = \sum_{k,l}^n |e_l\rangle\langle e_l| \otimes \text{tr}_f |H_l\rangle\langle H_k| = \theta > 0 \quad (3.6)$$

$$w_{P_+}(\phi^*) = \sum_{k,l}^n |e_k\rangle\langle e_l| \otimes \text{tr}_r |H_l\rangle\langle H_k| \quad (3.7)$$

となる。(3.6) 式より  $\phi^*$  は Jamiołkowski 同型写像を介して、密度作用素  $\theta$  を再構成することが分かる。また、 $w_J(\phi^*) = \theta > 0$  であるが、これは、 $\phi^*$  が常に完全共正写像であることに対応する。さらに、(3.7) 式において、 $w_{P_+}(\Lambda) > 0$  となる必要十分条件は、 $\theta^{T_k} > 0$  であること

が示せるので、次の定理が成立する[5]。

**定理 3.7**  $\theta$  は PPT 条件を満たす。  $\Leftrightarrow \phi^* \notin \mathcal{E}_q$

よって、系 3.4 は  $q$ -エンタングルメントを用いて次のように書き換えられる。

**系 3.8**  $\theta$  は可分割。  $\Leftrightarrow \phi^* \notin \mathcal{E}_q$

$\phi^*$  の完全正性と  $\theta$  の PPT 条件は同値であることがわかったが、一般に、PPT 条件が可分割の十分条件にはなり得ないことは、Horodecki 達によるものを含め、その反例がいくつか報告されている[17, 18, 19]。以上の議論をまとめると、合成系の状態は図 3.1 のように分類できる。

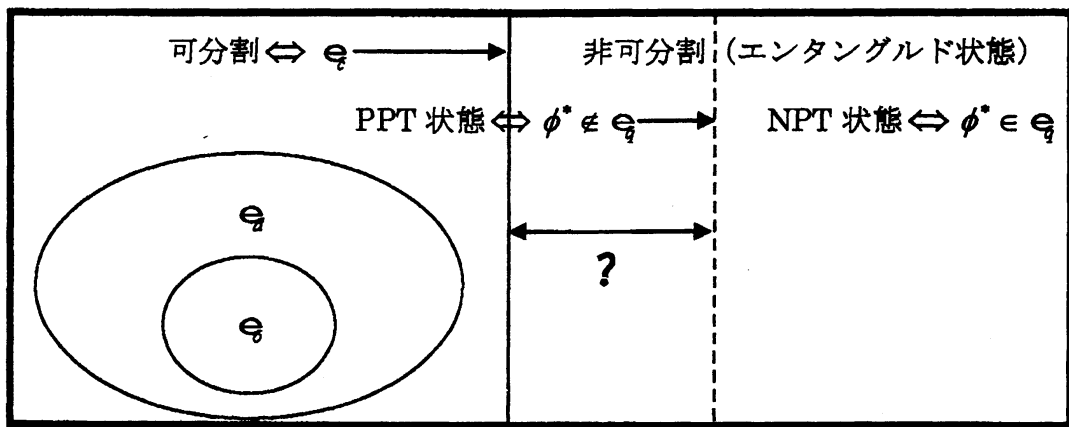


図 3.1 合成状態の分類

定理 3.3 を念頭におくと、高次元の合成系においても正写像の構造が解明されれば、それは高次元の可分割な状態の特徴付けにつながるが、我々のアプローチは、無限次元の合成系において、状態そのものと関連する完全共正な正写像の構造を解明するということであり、数学的な煩雑さはあるものの、その汎用性は高いと考えている。すなわち、PPT 条件は、反-ユニタリ作用素による“ $\sim$ オペレーション”を用いれば、無限次元の Hilbert 空間上に拡張することができるから、定理 3.7 にいたる議論は、無限次元の合成系においても踏襲される。

また、純粋エンタングルド状態は  $q$ -エンタングルメントになること、すなわち、純粋エンタングルド状態は  $q$ -エンタングルメントで特徴付けられることを考えれば、 $\phi^*$  が完全正で、かつエンタングルした状態のクラスが存在は、純粋エンタングルド状態と混合エンタングルド状態の構造の間に、大きな違いが在ること意味している。我々の文脈では、定理 2.1 における (2.11) 式の  $f$  の次元が持つ意味合いを、再度、熟考してみることも必要であろう。こうしたアプローチは、一般の状態空間の分類をエンタングルメントという視点から捉えなおすということである。

次節では、エンタングルド状態の具体的な事例として、Accardi と Fidaleo が導入した量子マルコフ連鎖の一つのクラス[7]が、 $\phi^*$  が完全正で、かつエンタングルド状態となる、任意の次元の多体系混合状態のモデルを与えることを取り上げる。

#### 4. エンタングルメント・マルコフ連鎖の非可分割性と PPT 条件

Accardi と Fidaleo は、最近の量子情報理論の発展の要請から古典系のランダムウォークを量子系に拡張するために、量子マルコフ連鎖の一つのクラスを導入した[7]。このクラスは、その構成の仕方からエンタングルメント状態を与えるという予想の下に、エンタングルメント・マルコフ連鎖（以下、EMC と略）と命名されていたが、無限個の合成系における純粋状態とみなされるこのクラスの状態の非可分割性は決して自明なことではなかった。

ところで、量子干渉の強さを計量する測度を適切に導入できれば、その測度によって定量的にエンタングルメント状態を特徴付けられることが期待される。著者達は、Degree of Entanglement（以下、DEN と略）[3, 4, 6] と呼ぶ指標を用いて、EMC が確かにエンタングルメント状態となっていることを示した[8]。

まず、DEN の定義を与えよう。いま、密度作用素  $\theta$  が部分系の密度作用素として  $\rho$  と  $\sigma$  を持つ合成状態としたとき、その DEN は次式で定義される。

$$D_{EN}(\theta; \rho, \sigma) = \frac{1}{2}(S(\rho) + S(\sigma)) - I_\theta(\rho, \sigma) \quad (4.1)$$

ここで、 $S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho$ 、 $I_\theta(\rho, \sigma) = \text{tr} \theta (\log \theta - \log \rho \otimes \sigma)$  である。DEN は、純粋状態の可分割性の必要十分条件、混合状態に対しては、その必要条件を与える。

**定理 4.1** [6, 8]  $\theta$  を純粋合成状態とする。このとき、

- (1)  $\theta$  が可分割  $\Leftrightarrow D_{EN}(\theta; \rho, \sigma) = 0$
- (2)  $\theta$  がエンタングルメント状態  $\Leftrightarrow D_{EN}(\theta; \rho, \sigma) < 0$

**定理 4.2** [3, 4, 9]  $\theta$  を混合合成状態とすると、

$$\theta \text{ が可分割} \Rightarrow D_{EN}(\theta; \rho, \sigma) \geq 0$$

定理 4.1、定理 4.2 を用いれば、簡単な計算で EMC の可分割性を調べることができる。その概要を述べるために、EMC の構成法について簡単に振り返ろう。

有限次元の複素 Hilbert 空間  $h = C^d$  ( $d < \infty$ ) に対し、適当な基底  $\{|e_i\rangle\}_{1 \leq i \leq d}$  を一つ固定し、さらにその基底から適当なベクトルを一つ選び、それを  $|e\rangle$  ( $e \in \{|e_i\rangle\}$ ) と表記して固定する。この固定された基底やベクトルを明記して、無限テンソル Hilbert 空間  $h_N = \bigotimes_N^{(e)} C^d$  を考える。いま、 $P = \{p_i\}_{1 \leq i \leq d}$  を確率分布、 $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  を推移確率行列 (i. e.,  $t_{ij} \geq 0, \sum_j t_{ij} = 1$ ) とし、

$\sqrt{p_i}, \sqrt{t_{ij}}$  をそれぞれの要素の複素平方根 (i. e.,  $|\sqrt{p_i}|^2 = p_i, |\sqrt{t_{ij}}|^2 = t_{ij}$ ) とする。このとき、 $h_N$  のベクトル  $|\Psi_n\rangle$  を次のように定義する。

$$|\Psi_n\rangle = \sum_{j_0, j_1, \dots, j_n} \sqrt{p_{j_0}} \prod_{\alpha=0}^{n-1} \sqrt{t_{j_\alpha j_{\alpha+1}}} |e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_n}\rangle \quad (4.2)$$

ここで、 $|e_{j_0}, \dots, e_{j_n}\rangle = \left( \bigotimes_{\alpha \in [0, n]} |e_{j_\alpha}\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_{\alpha \in [0, n]^c} |e\rangle \right) \in \bigotimes_N^{(e)} C^d$  である。さて、 $h_N$  上の観測量の

集合として、 $d \times d$  の全ての複素行列からなる代数  $M_d$  を用いて  $\mathfrak{a} = \bigotimes_N M_d$  を用意する。このとき、観測量  $A_\Lambda \in \mathfrak{a}$  が有限領域  $\Lambda$  に局所化された観測量であるとは、ある作用素  $\bar{A}_\Lambda \in \mathfrak{a}_\Lambda = \bigotimes_\Lambda M_d$  が存在して、 $A_\Lambda = \bar{A}_\Lambda \otimes I_{\Lambda^c}$  であることをいう。以下、 $A_\Lambda$  を  $\bar{A}_\Lambda$  と同一視して、 $A_\Lambda = \bar{A}_\Lambda$  と書けば、次の補題が成立する[7]。

**補題 4.3** 任意の局所観測量  $A \in \mathfrak{a}_{[0,k]}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) に対して、次が成立。

$$\langle \Psi_{k+1}, A \Psi_{k+1} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi_n, A \Psi_n \rangle = \varphi(A) \quad (4.3)$$

$M_d$  を  $\{|e_i\rangle\}_{1 \leq i \leq d}$  で対角化された行列の集合からなる可換代数に制限すれば、(4.3)式は、古典系のマルコフ過程に対応する。補題 4.3 で定義される  $\mathfrak{a}$  上の状態  $\varphi$  のエンタングルメントの度合いを評価するために、EMC状態  $\varphi$  のDENを次のように定義する。

$$D_{EN}(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{D}_{EN}(\varphi_n) \quad (4.4)$$

$$\underline{D}_{EN}(\varphi_n) = \inf_{k \in [1,n]} D_{EN}(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| : \rho_k, \sigma_{(k)}) \quad (4.5)$$

ここで、 $\varphi_n(\cdot) = \text{tr} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|(\cdot)$ 、 $\rho_k = \text{tr}_{\Gamma_{[0,k]}} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ 、 $\sigma_{(k)} = \text{tr}_{\Gamma_{(k,n]}} |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$  である。

**定理 4.4** [8] あるユニタリ行列  $U = (u_{ij})$  が存在して、 $t_{ij} = u_{ij}^* u_{ij}$  と書けるとき、次が成立する。

$$D_{EN}(\varphi) = -H(P)$$

ここで、 $H(P) = -\sum_{i=1}^d p_i \log p_i$ 。

定理 4.4 から、EMC状態  $\varphi$  は“生成的”にエンタングル状態の必要十分条件（定理 4.1）を満たしているといえ、この意味で、EMCは確かにエンタングルド状態となっている。また、そのエンタングルメントの度合いは、EMC状態  $\varphi$  を構成する初期分布  $P$  に依存する。

次に、領域  $[0, \nu]$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) に局所化された EMC 状態  $\omega_{[0,\nu]}$  について考えよう。 $\mathfrak{a}_{[0,\nu]}$  上の  $\omega_{[0,\nu]}$  は、

$$\omega_{[0,\nu]}(A) = \langle \Psi_{\nu+1}, A \Psi_{\nu+1} \rangle = \text{tr} A \theta_{[0,\nu]} \quad (A \in \mathfrak{a}_{[0,\nu]}) \quad (4.6)$$

$$\theta_{[0,\nu]} = \text{tr}_{\Gamma_{\nu+1}} |\Psi_{\nu+1}\rangle\langle\Psi_{\nu+1}| \quad (4.7)$$

と与えられる。 $\theta_{[0,\nu]}$  は、混合状態  $\omega_{[0,\nu]}$  に対応する密度作用素である。いま、定理 4.4 と同様に、推移確率行列  $T$  の要素の複素平方根があるユニタリ行列  $U$  の要素で与えられているとすると、次の定理が成立する[9]。

**定理 4.5** 任意の  $\mu \in [1, \nu-1]$  に対して、 $D_{EN}(\theta_{[0,\nu]}; \rho_\mu, \sigma_{(\mu)}) < 0$ 。

すなわち、 $\theta_{[0,\nu]}$ は、任意の部分系への分割  $h_{[0,\nu]} = h_{[0,\mu]} \otimes h_{(\mu,\nu]}$  において、エンタングルメント状態の十分条件（定理 4.2 の対偶）を満たしていることが分かる。また、 $\theta_{[0,\nu]}$  が PPT 条件を満たすことが、次の定理から示される [9]。

**定理 4.6** 任意の部分系への分割  $h_{[0,\nu]} = h_{[0,\mu]} \otimes h_{(\mu,\nu]}$  において、 $\theta_{[0,\nu]}$  のエンタングルメント  $\phi_{\theta_{[0,\nu]}}^*$  は、完全正である。

### 参考文献

1. R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
2. M. Horodecki, P. Horodecki. and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
3. V. P. Belavkin, M. Ohya, Infin. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **4**, 137 (2001).
4. V. P. Belavkin, M. Ohya, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **458**, 209 (2002)
5. J. Jamiołkowski, T. Matsuoka, M. Ohya, "Entangling operator and PPT condition", Tus preprint.
6. M. Ohya, T. Matsuoka, Foundation and Probability and Physics-3, AIP **750**, 298 (2005).
7. L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. di Mat. Pura Appl. (2004).
8. L. Accardi, T. Matsuoka, M. Ohya, Infin. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **9**, 379 (2006).
9. L. Accardi, T. Matsuoka, M. Ohya, "Entangled Quantum Markov Chains satisfying the PPT condition", Tus preprint.
10. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
11. J. Jamiołkowski, Rep. Math. Phys. **3**, 275 (1972).
12. M.-D. Choi, Can. J. Math. **3**, 520 (1972).
13. S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys. **10**, 165 (1976).
14. E. Stormar, Acta. Math. **110**, 233 (1963).
15. M.-D. Choi, Lin. Alg. Appl. **10**, 285 (1975)
16. G. Kimura, A. Kossakowski, Open Sys. & Information Dyn. **12**, 1 (2005)
17. M. Horodecki, P. Horodecki. and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. **78**, 574 (1997).
18. C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, T. Mor, P. W. Shor, J. A. Smolin, and B. M. Terhal, Phys. Rev. Lett. **82**, 5385 (1999).
19. R. F. Werner, M. M. Wolf, Phys. Rev. Lett. **86**, 3658 (2001).